Écrit de Mathématiques (épreuve de discipline secondaire)

Exercice 1 : Étude d'un opérateur

Soit $C^0(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $C^\infty(\mathbb{R})$ le sous-espace des fonctions infiniment dérivables (c'est à dire qui ont une dérivée k-ième pour tout entier k). On va étudier l'opérateur $L : C^0(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ défini, pour toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par $L(f)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée pour tout x dans $\mathbb{R}$ par la formule :

$$L(f)(x) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right).$$

1. Montrer que $C^\infty(\mathbb{R})$ est stable par L, c'est à dire que pour $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, on a $L(f) \in C^\infty(\mathbb{R})$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on note E_λ le sous-espace de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions qui ont λ comme valeur propre, c'est à dire les fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L(f)(x) = \lambda\, f(x).$$

   (a) Soit f dans E_λ tel que $|\lambda| > 2$ et soit $a \geq 1$. On pose

$$M_a = \sup_{x \in [-2a, 2a]} |f(x)|.$$

      i. Montrer que, pour tout $x \in [-2a, 2a]$, on a $|L(f)(x)| \leq 2M_a$.
      ii. Prouver que $f = 0$.

   (b) On suppose que $\lambda \in [-2, 2] \setminus \{0\}$ et que f est dans E_λ.
      i. Montrer que la dérivée f' de f est un vecteur propre de L et déterminer la valeur propre associée.
      ii. En déduire que f est une fonction polynomiale.
3. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynomiales définie par $P_0(x) = 1$ et

$$P_{n+1}(x) = (n+1)\left(\int_0^x P_n(t)\,dt - \int_0^1 \left(\int_0^u P_n(t)\,dt\right)du\right).$$

   Soit aussi $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynomiales donnée par

$$H_n(x) = 2^{1-n}L(P_n)(x) = 2^{1-n}\left(P_n\left(\frac{x+1}{2}\right) + P_n\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

   (a) Montrer que $H_0(x) = 1$ et que pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(i)\ H_n'(x) = nH_{n-1}(x),$$
$$(ii) \int_0^1 H_n(t)\,dt = 0.$$

   (b) Montrer que $H_n = P_n$ pour tout n.
4. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe une fonction non-nulle f_i qui est un vecteur propre de L de valeur propre égale à 2^{1-i}.

Exercice 2 : matrices quasicommutantes

Dans tout l'exercice, nous travaillons sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Si ω est un nombre complexe, et si A, B sont deux éléments de l'espace $M_n(\mathbb{C})$ des matrices de taille n, disons que A et B *ω-commutent* si

$$AB = \omega BA.$$

1. (a) Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

-1-commutent.

(b) Supposons que A et B ω-commutent. Soit p et q deux entiers positifs. Montrer que A^p et B^q ω^{pq}-commutent.

(c) Supposons que A et B ω-commutent. Soit p, q, r et s des entiers positifs. Trouver un nombre complexe λ tel que $A^p B^q$ et $A^r B^s$ λ-commutent.

2. (a) Montrer qu'il existe des polynômes $Q_{k,N}$ dans $\mathbb{C}[X]$ tels que si ω est un nombre complexe et si A et B ω-commutent, on a

$$(A + B)^N = \Sigma_{k=0}^{N} Q_{k,N}(\omega) B^k A^{N-k}.$$

Quelle est la valeur de $Q_{k,N}$ en 0 ? En 1 ?

(b) Soit N un entier positif. Soit P_N le polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ défini par la formule

$$P_N(X) = \Pi_{r=1}^{N}(1 + X + \ldots + X^{r-1}).$$

Soit $k \leq N$. Montrer que P_k divise P_N.

(c) Montrer par récurrence sur N l'égalité

$$P_k P_{N-k} Q_{k,N} = P_N.$$

(d) Supposons que ω est une racine primitive N-ième de l'unité, c'est-à-dire que $\omega^N = 1$ et $\omega^k \neq 1$ pour tout $k < N$. Montrer que

$$(A + B)^N = A^N + B^N.$$